Ασκηση 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$\bar{I} = \int_V \operatorname{div} F \, dV \qquad \bar{F}: V \to R^3$ οπου

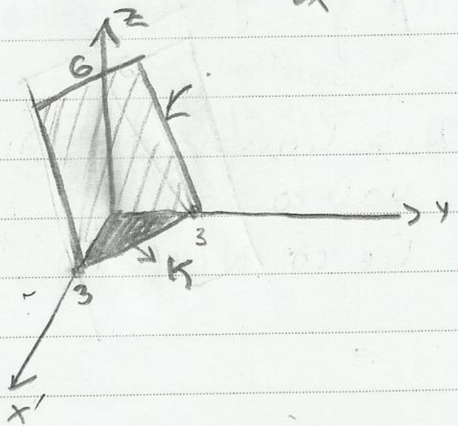
$\bar{F}(x,y,z) = (2xy+z,\ y^2,\ -x-3y)$

και $V \subseteq \mathbb{R}^3$ που περικλείεται απο τα επιπεδα

$x=0,\ y=0,\ z=0$ και το $2x+2y+z=6$

<u>Λυση</u>

$$\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy+z) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(-x-3y) = 2y+2y+0 = 4y$$



- $x=y=0 \rightsquigarrow z=6$
- $x=z=0 \rightsquigarrow y=3$
- $y=z=0 \rightsquigarrow x=3$

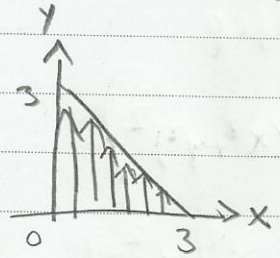
$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in K \quad 0\le z\le 6-2x-2y\}$ ← καν. ως προς xy

όπου

$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 3 \text{ και } 0\le y\le 3-x\}$ ← κανον. ως προς x.

Άρα, $I=\int_K\int_0^{6-2x-2y} = \int_0^3\int_0^{3-x}\int_0^{6-2x-2y} 4y\,dz\,dy\,dx =$

$$= \int_0^3\int_0^{3-x} 4y\,(6-2x-2y)\,dy\,dx = 27.$$



Άσκηση 2: Υπολογίστε $J=\int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\sigma$ για τη συνάρτηση

$F(x,y,z)=(x-y,\ y-z,\ -x+z)$

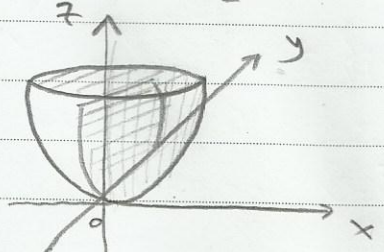
και $\Omega=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x^2+y^2\le z\le 1,\ x\ge 0\}$

με n το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο $\partial\Omega$

ΛΥΣΗ

Από Gauss

$J=\int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\sigma = \int_\Omega \operatorname{div}F(x,y,z)\,d(x,y,z) = 3\int_\Omega 1\,d(x,y,z)$ (1)



$\Omega=\{(x,y,z) : (x,y)\in K : x^2+y^2\le z\le 1\}$

Άρα (1)

$$3\cdot\int_K\left(\int_{x^2+y^2}^1 1\,dz\right)d(x,y) =$$

$$= 3\int_K (1-(x^2+y^4))\,d(x,y) \quad (2)$$

$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1 \text{ και } x^2+y^2\le 1\}$

$K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1 \text{ και } -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$

$$(2): \quad 3\cdot\int_0^1\int_{\sqrt{1-x^2}}^{+\sqrt{1-x^2}} (1-(x^2+y^2))\,dx\,dy$$

Αλλαγή μεταβλητών σε πολικές

$$K^* = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = r\cos\varphi \ , y = r\sin\varphi \ , \varphi \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \ , r \in [0,1] \}$$

Άρα, $3 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 (1-r^2)\, r \, dr \, d\varphi = \ldots = \ldots$

Άσκηση 3: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$P = \int_{\partial S} F \cdot n \, d\sigma \ , \quad F(x,y,z) = (1, 1, z(x^2+y^2)^2)$$

με ∂S επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2+y^2 \le 1$
με $0 \le z \le 1$ και n το μοναδιαίο κάθετο
(εξωτερικό)

ΛΥΣΗ

Gauss $\rightarrow P = \int_S (x^2+y^2)^2 \, d(x,y,z)$

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \ , 0 \le z \le 1 \}$$

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1 \}$$

$$P = \int_D \left(\int_0^1 (x^2+y^2)^2 \, dz \right) d(x,y) = \int_D (x^2+y^2)^2 \, d(x,y) \xrightarrow{\text{πολικές}}$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} r^5 \, d\varphi \, dr = \frac{2\pi}{6}$$